Schéma CUSUM – odvození parametrů diagramu

Schéma CUSUM vychází z Waldova sekvenčního testu, na němž je založena přejímka postupným výběrem. Předpokládá se posloupnost nezávislých náhodných veličin X_1, X_2, ..., X_m se stejným rozdělením, popsaným hustotou či pravděpodobnostní funkci $f(x,\theta)$, a testuje se hypotéza H_0: $\theta = \theta_0$ proti alternativě H_1: $\theta = \theta_1$. Hodnota θ_0 je cílovou hodnotou parametru θ, θ_1 představuje jeho nepřípustnou hodnotu. Test je založen na věrohodnostním poměru

$$\Lambda(X_1, X_2, ..., X_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} \tag{1}$$

Pokud platí $\Lambda < \beta/(1-\alpha)$, přijme se H_0, při $\Lambda > (1-\beta)/\alpha$ se přijme H_1. Platí-li

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \Lambda < \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{2}$$

pokračuje se kontrolou další jednotky. Symboly α a β představují riziko chyby 1. a 2. druhu. Při aplikaci v SPC znamená překročení mezí signál, že došlo ke změně parametru procesu. Vzhledem k tvaru modelu různých rozdělení je výhodné pracovat s logaritmem věrohodnostního poměru, takže podmínka (2) se změní na

$$\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) < \ln \Lambda < \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \tag{3}$$

Logaritmus věrohodnostního poměru (1) je pro různá rozdělení uveden v tab. 1. Obecně jej lze vyjádřit ve tvaru

$$c\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - K'\right) \tag{4}$$

kde c a K' jsou konstanty, jejichž hodnoty závisí na parametrech θ_0, θ_1. Nerovnosti (3) můžeme potom vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{c}\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) < \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - K'\right) < \frac{1}{c}\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \tag{5}$$

Obvykle se položí $\beta = 0$. Kumulativní součet uprostřed můžeme zapsat rekurentně jako

$$C_j = C_{j-1} + \left(x_j - K'\right) \tag{6}$$

V kap. 8 se používá jiné vyjádření $C_j = C_{j-1} + \left(x_j - \mu_0 - K\right)$, v němž $K = k\sigma = K' - \mu_0$.

Tab. 1 Hustota a logaritmus věrohodnostní funkce pro vybraná rozdělení

	$f(x_i, \theta)$	$\ln \Lambda(x_1, x_2, ..., x_m)$
N(μ, σ^2) σ^2 známý	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \frac{\mu_1+\mu_0}{2}\right)$
Po(μ)	$\frac{\mu^{x_i}}{x_i!}\exp(-\mu)$	$(\ln\mu_1 - \ln\mu_0)\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \frac{\mu_1-\mu_0}{\ln\mu_1-\ln\mu_0}\right)$
Bi(n, p) n pevné	$\binom{n}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$	$\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\frac{1-p_0}{p_0}\right)\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - n\frac{\ln\frac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\frac{1-p_0}{p_0}\right)}\right)$
G(p)	$f(x_i) = p(1-p)^{x_i-1}$	$\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \frac{\ln\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}}{\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}}\right)$
NB(p, r) r pevné	$f(x_i) = \binom{x_i-1}{r-1} p^r(1-p)^{x_i-r}$	$\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - r\frac{\ln\frac{p_0(1-p_1)}{p_1(1-p_0)}}{\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}}\right)$